UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA
Scuola di Ingegneria

Corso di

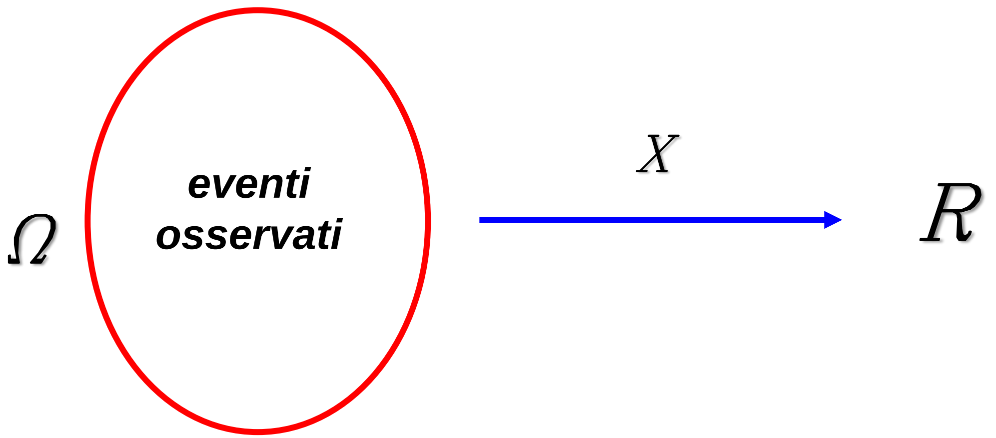
TECNICA DELLE COSTRUZIONI

Richiami di Statistica:
LA DISTRIBUZIONE NORMALE

Docente:
Prof. Ing. Angelo MASI

Collaboratori:
Ing. Vincenzo MANFREDI
Ing. Giuseppe VENTURA

LA DISTRIBUZIONE NORMALE (DISCRETA)

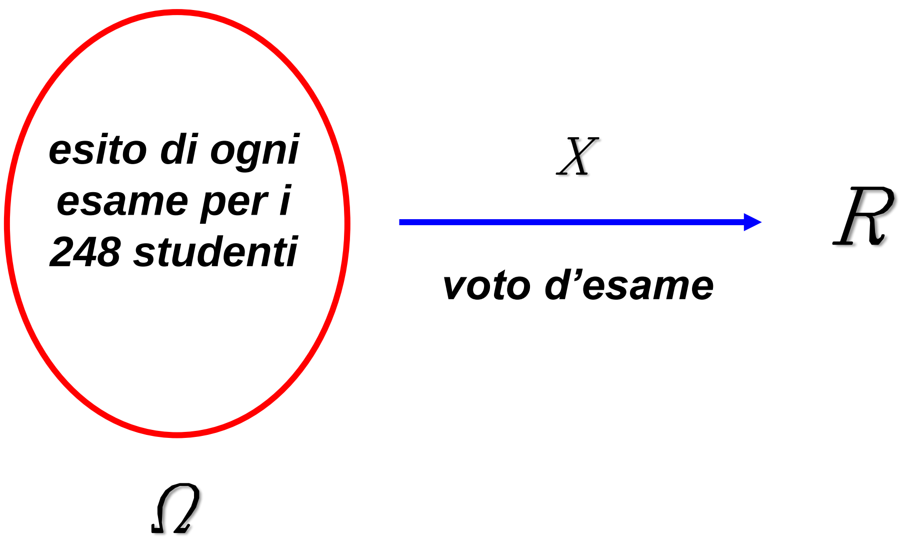


Una variabile X casuale (aleatoria o stocastica) è una funzione (regola) definita nello spazio campionato Ω che associa un numero reale ad ogni possibile esito di un evento osservato (aleatorio).

In corrispondenza di tale numero se ne assegna una probabilità p_k (se lo spazio campionato è discreto) o una densità di probabilità in un certo intervallo $P(a \leq X \leq b)$ se lo spazio è continuo

LA DISTRIBUZIONE NORMALE (DISCRETA)

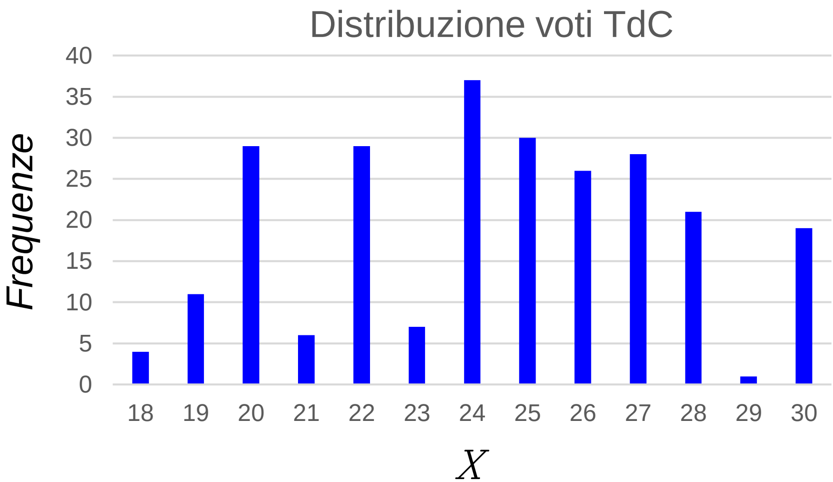
Supponiamo di avere una popolazione di 248 studenti che hanno sostenuto l'esame di Tecnica delle Costruzioni negli ultimi 6 anni:

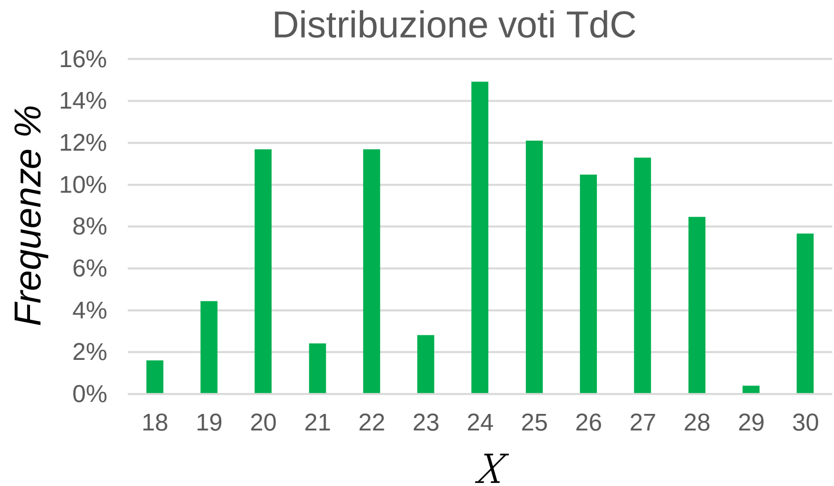


X	n_k	p_k
18	n_{18}	p_{18}
19	n_{19}	p_{19}
20	n_{20}	p_{20}
…	…	…
28	n_{28}	p_{28}
29	n_{29}	p_{29}
30	n_{30}	p_{30}

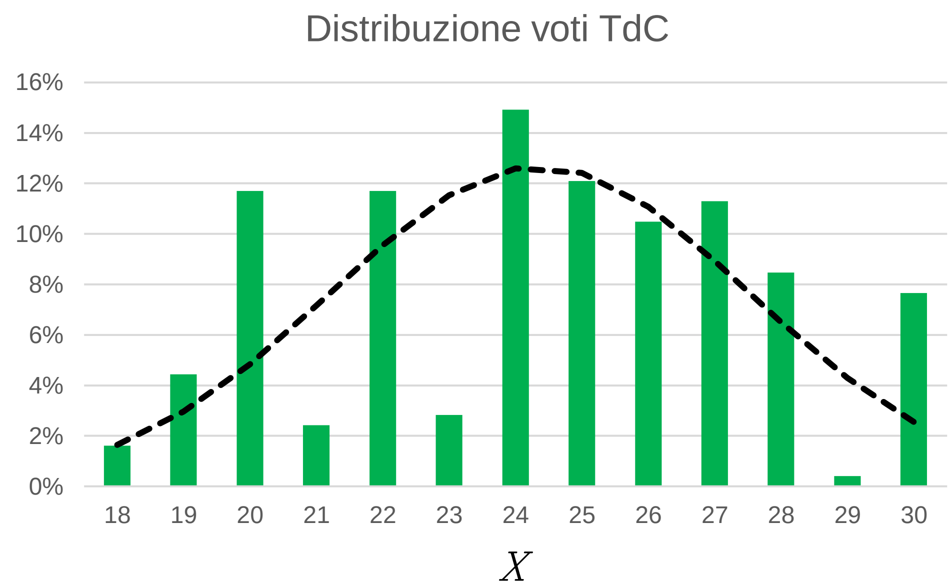
- lo spazio campionato è l'insieme dei voti (evento osservato) per i 248 studenti di TdC.
- il voto è la variabile aleatoria e per ogni valore è possibile *assegnare una probabilità discreta p_k*

LA DISTRIBUZIONE NORMALE (DISCRETA)





Definendo media (μ) e deviazione standard (σ) è possibile tracciare una ipotetica distribuzione continua dei voti compresi tra 18 e 30



LA DISTRIBUZIONE NORMALE (DISCRETA)

Determiniamo gli indici di posizione o centralità (media, moda e mediana) per riassumere le informazioni della variabile voto (rilevata attraverso un'indagine statistica su una popolazione di 248 studenti).

- La media aritmetica di una distribuzione è la somma dei termini divisa per il numero di osservazioni N:

$$\mu = \frac{18 + 18 + 19 + 20 + 25 + 30 + \dots 27 + 24 + 28}{248} = 24$$

- La moda è il termine della distribuzione che presenta la frequenza più alta, nel nostro caso è ancora il voto 24.

LA DISTRIBUZIONE NORMALE (DISCRETA)

- La mediana, calcolata per variabili quantitative di tipo continuo e ordinale, è il valore centrale della distribuzione:

+

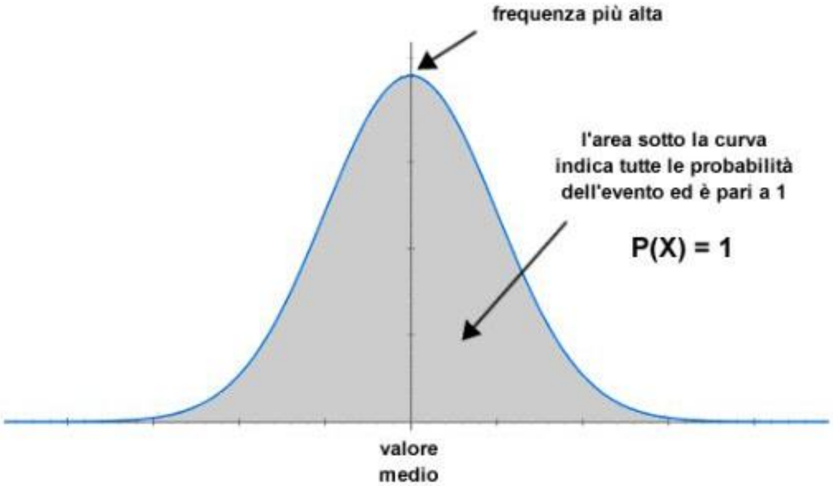
voto	18	18	19	…	24	**25**	**25**	26	…	30	30	30
studente	1	2	3	…	123	**124**	**125**	126	…	246	247	247

E' necessario ordinare in modo crescente i termini della distribuzione. Nel nostro caso il numero dei voti è pari, dunque la mediana (m) è definita dalla media aritmetica dei voti che occupano la posizione 124 e 125 ovvero m=25.

LA DISTRIBUZIONE NORMALE (CONTINUA)

La distribuzione Normale (o distribuzione di Gauss) è una distribuzione di probabilità continua, spesso usata per descrivere variabili casuali a valori reali che tendono a concentrarsi attorno al valor medio. Il grafico della funzione di densità di probabilità associata è simmetrico ed ha una forma a campana, nota come campana di Gauss.

Curva normale sovrapposta all'istogramma



$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

LA DISTRIBUZIONE NORMALE CONTINUA

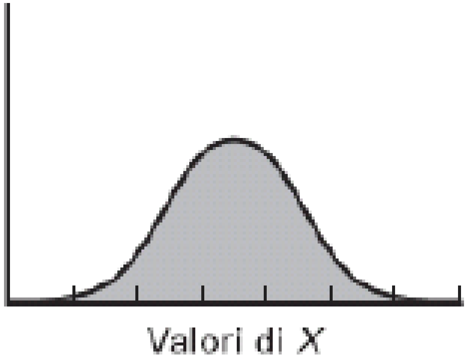
- Una funzione di densità di probabilità continua è un modello che definisce analiticamente come si distribuiscono i valori assunti da una variabile aleatoria continua.

- Quando si dispone di un’espressione matematica adatta alla rappresentazione di un fenomeno continuo, siamo in grado di calcolare la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori compresi in intervalli (gli intervalli sono gli eventi di interesse, per una v.a. continua).

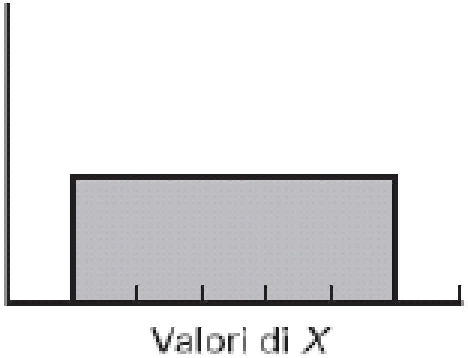
- I modelli continui hanno importanti applicazioni in ingegneria, scienze fisiche, naturali e sociali.

LA DISTRIBUZIONE NORMALE CONTINUA

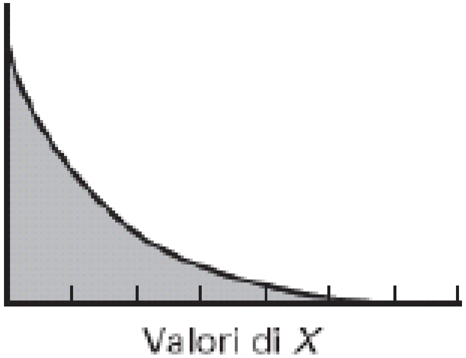
- Alcuni tipici fenomeni continui sono ad esempio le dimensioni dei campioni/prelievi (volume, peso, ecc.) o il tempo che intercorre fra il verificarsi di due eventi di interesse (ad esempio un incidente).
- Nelle tre figure successive sono rappresentate diverse funzioni di densità di probabilità: normale (a), uniforme (b) ed esponenziale (c).



(a)



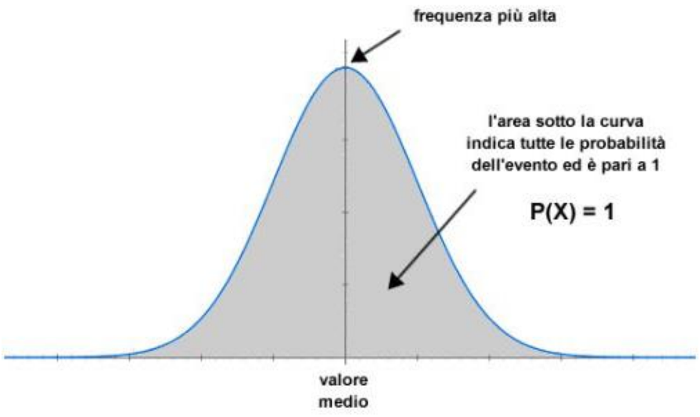
(b)



(c)

LA DISTRIBUZIONE NORMALE CONTINUA

Principali caratteristiche della curva della distribuzione normale

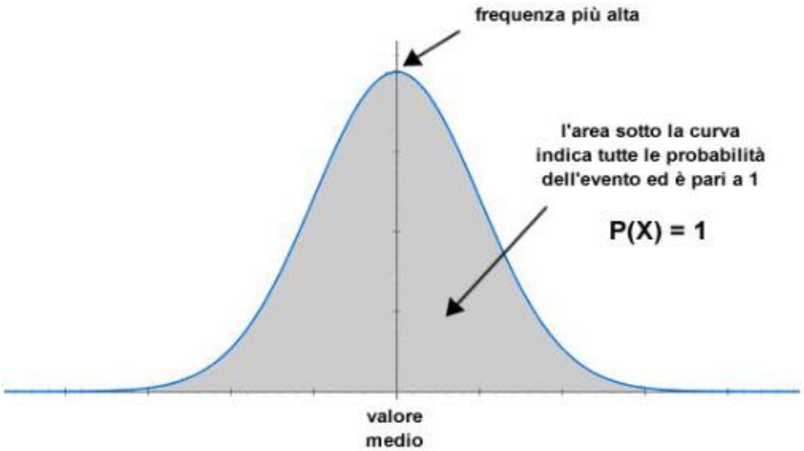


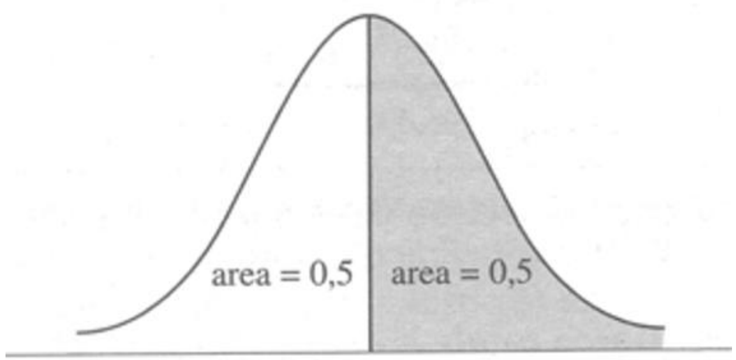
- La frequenza/probabilità più elevata coincide con il valore medio centrale e decresce spostandosi a destra o sinistra.

- Allontanandosi dal valore medio, la curva si avvicina sempre più all'asse delle ascisse ma non giunge mai a toccarlo: quindi si possono avere anche (pochissime) osservazioni che risultano molto distanti dalla media.

LA DISTRIBUZIONE NORMALE CONTINUA

Principali caratteristiche della curva della distribuzione normale



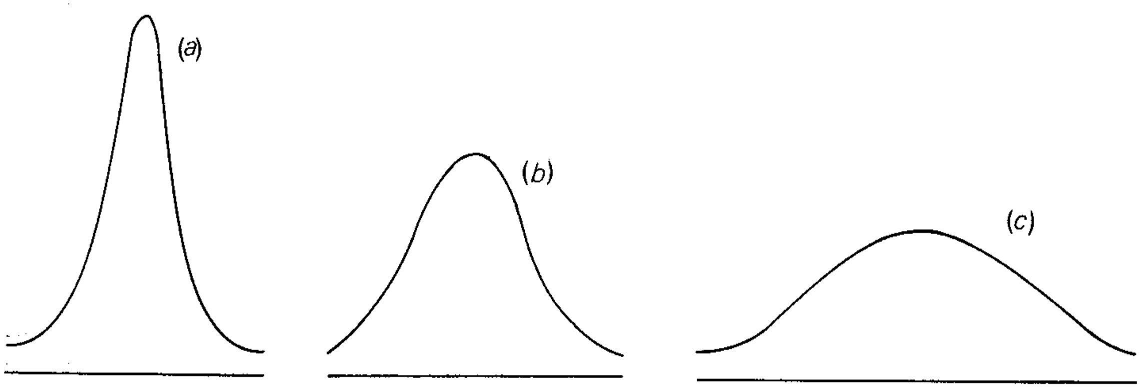


- L'area complessiva sotto la curva normale è pari ad 1 (ovvero 100%) poiché si tratta di una curva probabilistica e comprende i possibili eventi, ovvero tutti i possibili valori da più infinito a meno infinito. La superficie sotto la curva si può calcolare con un integrale

- Per la simmetria della curva, l'area a sinistra della media è pari a 0.5, come pure l'area alla sua destra

LA DISTRIBUZIONE NORMALE CONTINUA

- Media, moda e mediana coincidono con il valore centrale che ha anche la frequenza massima
- Ogni curva normale viene univocamente identificata da due parametri: media (μ) e deviazione standard (σ) che ne determinano rispettivamente la posizione sull'asse delle ascisse e "l'ampiezza" in termini di valori probabili



tutte le curve normali hanno dunque la stessa forma caratteristica, ma possono essere più strette e appuntite, oppure più larghe e piatte.

LA DISTRIBUZIONE NORMALE CONTINUA

Per disegnare il grafico della distribuzione normale si utilizza un'apposita funzione f(x):

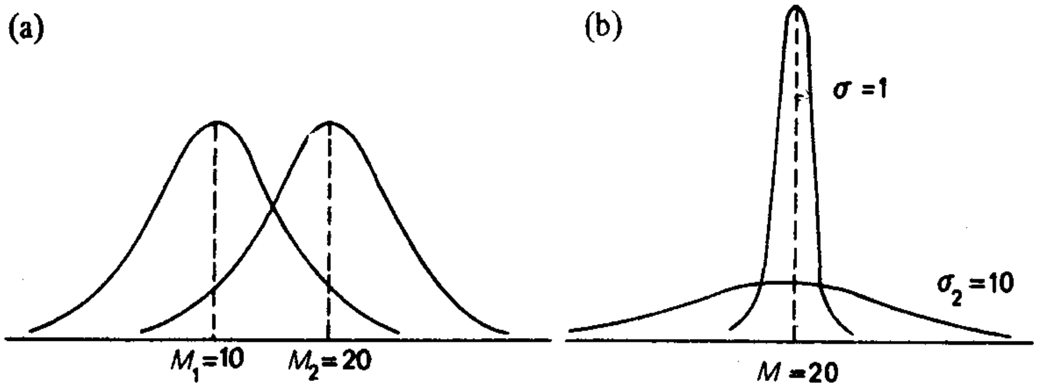
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)^2} \qquad \mu_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \begin{aligned} \pi &= 3{,}14159 \\ e &= 2{,}71828 \end{aligned}$$

La funzione f(x) descrive, al variare dei valori assunti dai due parametri (σ, μ) una famiglia di curve normali :

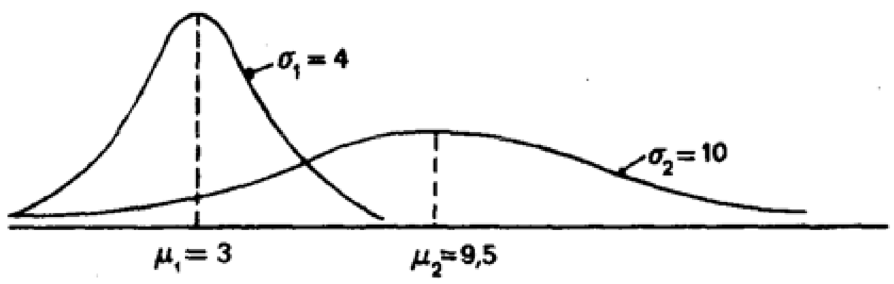
a) se varia μ, si sposta orizzontalmente l'asse di simmetria della curva;

b) se varia σ, la curva si allarga e appiattisce al crescere di σ.



LA DISTRIBUZIONE NORMALE CONTINUA

c) variando contemporaneamente μ e σ, la curva trasla orizzontalmente e contemporaneamente si fa più o meno appuntita



Una distribuzione Normale con media μ e scarto quadratico σ viene indicata semplicemente come: N(μ,σ)

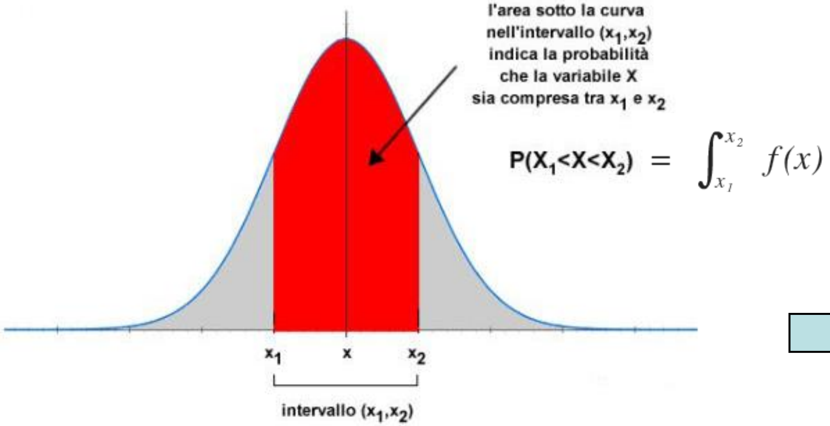
Per indicare che la variabile X si distribuisce come una Normale si scrive:

$$X \sim N(\mu,\sigma)$$

Il Coefficiente di Variazione adimensionale (CV=σ/μ) è un indice di dispersione: misura quanto i valori presenti nella distribuzione distano da un valore centrale scelto come riferimento.

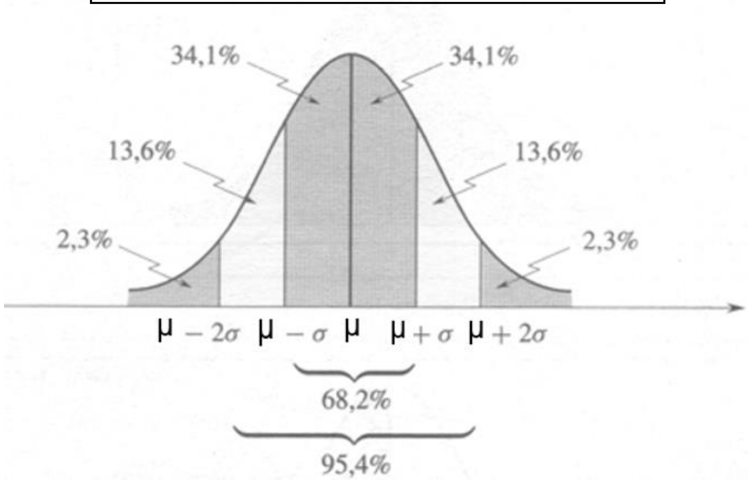
LA DISTRIBUZIONE NORMALE CONTINUA

La probabilità che la variabile X sia compresa in un determinato intervallo (x1 , x2) è uguale alla superficie sottostante la curva di Gauss tra gli estremi (x1 , x2).



Funzione di densità di probabilità

aree sottese in termini di σ di distanza dalla media μ



Il 68,2 % dell'area si trova compresa tra (μ − σ) e (μ + σ)

Il 95,4 % dell'area si trova compresa tra (μ − 2σ) e (μ + 2σ)

Il 99,7 % dell'area si trova compresa tra (μ − 3σ) e (μ + 3σ)

ESEMPIO 1: densità di probabilità

Supponiamo che il reddito delle famiglie degli studenti dell'UNIBAS si distribuisca normalmente con μ =15000€ e σ=1500€.

Quesito: Se l'ARDSU vuole assegnare una borsa di studio al 2,3% degli studenti meno abbienti, che soglia di reddito massimo deve fissare?

Si osserva che :

$\mu+2\sigma$ = 15000€ + 3000€ = 18000€

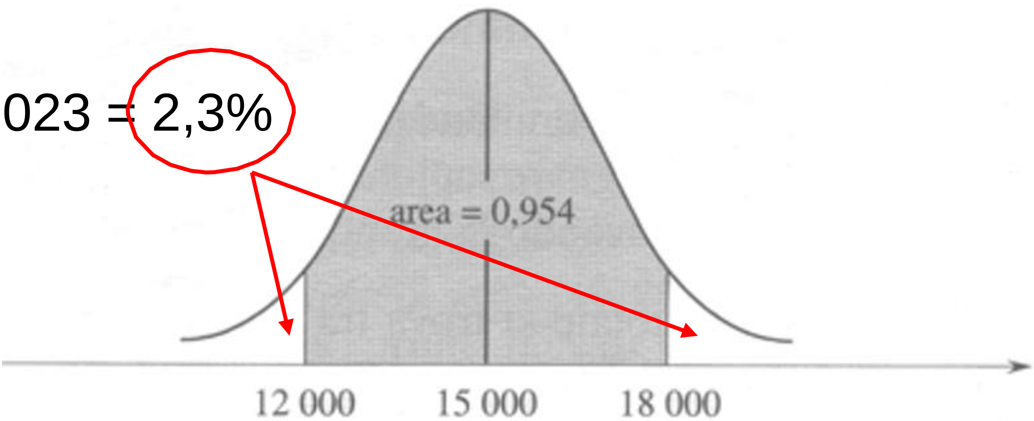
$\mu-2\sigma$ = 15000€ − 3000€ = 12000€

L'area esterna all'intervallo

[12.000,18.000]

contiene il 4,6% circa dei casi

(1 − 0,954)/2 = 0,046/2 = 0,023 = 2,3%



LA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA

La distribuzione Normale è scomoda da usare per calcolare le aree di interesse, quando i valori critici non sono multipli esatti di σ, perché dipende da due parametri (μ e σ). Per questo si introduce la Normale Standard, ottenuta standardizzando la variabile Normale.

Data una variabile X ~ N (μ,σ) :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

la trasformazione Z avrà media nulla (μ=0) e deviazione standard (σ =1)

LA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA

La funzione f(z) risultante dalla trasformazione non dipende più da alcun parametro:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

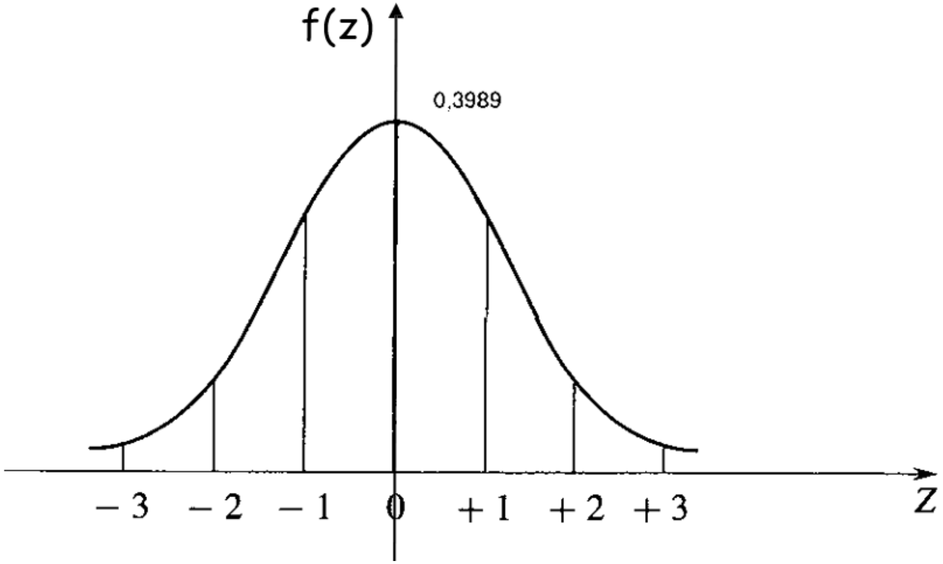
Questa distribuzione viene chiamata Normale Standard e indicata come: N(0,1)

La funzione Normale Standard ha la stessa forma della Normale completa, ma non contenendo nessun parametro, descrive un'unica e ben determinata curva.

LA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA

Valgono naturalmente tutte le proprietà viste per la Normale, con gli opportuni adattamenti per tenere conto del fatto che la media vale $\mu=0$ e la deviazione standard vale $\sigma=1$, quindi:

- la curva è centrata e simmetrica rispetto all'origine degli assi: $z = 0$
- il massimo delle frequenze vale $f(0) = 1/(2\pi)^{0.5}=0{,}3989$
- le aree di interesse viste in precedenza diventano:



LA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA

La funzione f(z) non dipende da alcun parametro, quindi può essere facilmente tabulata, cioè possibile costruire una tavola che riporta le aree sottese alla curva in corrispondenza di diversi valori di z.

In questa tavola viene riportata l'area compresa tra 0 e un punto z collocato a destra dell'origine

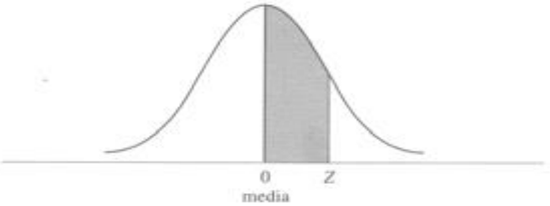


Tavola A.1 La distribuzione normale.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4022	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Esempio:

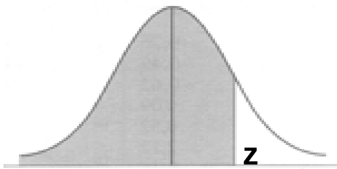
L'area sottesa dalla N(0,1) nell'intervallo [0,1.24] è pari a: 0,3925

LA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA

L'altro formato della tavola della Normale Standard è quello che riporta la Funzione di ripartizione F(z) (frequenze cumulate), cioè l'intera area a sinistra di un dato valore z.

Questa tavola è del tutto equivalente alla precedente, che forniva in pratica:

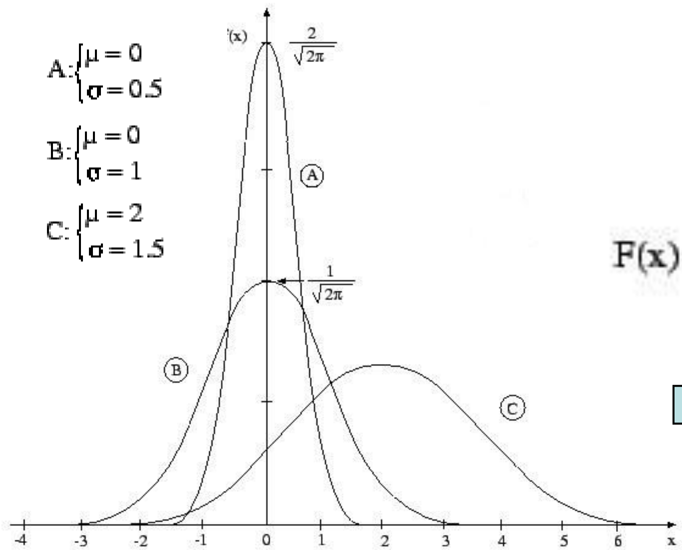
$F(z) – F(0) = F(z) – 0,5$



→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.00	50000	50040	50080	50120	50160	50199	50239	50279	50319	50359
0.01	50399	50439	50479	50519	50559	50598	50638	50678	50718	50758
0.02	50798	50838	50878	50917	50957	50997	51037	51077	51117	51157
0.03	51197	51237	51276	51316	51356	51396	51436	51476	51516	51555
0.04	51595	51635	51675	51715	51755	51795	51834	51874	51914	51954
0.05	51994	52034	52074	52113	52153	52193	52233	52273	52313	52352
0.06	52392	52432	52472	52512	52551	52591	52631	52671	52711	52751
0.07	52790	52830	52870	52910	52949	52989	53029	53069	53109	53148
0.08	53188	53228	53268	53307	53347	53387	53427	53466	53506	53546
0.09	53586	53625	53665	53705	53745	53784	53824	53864	53903	53943
0.10	53983	54022	54062	54102	54142	54181	54221	54261	54300	54340
0.11	54380	54419	54459	54498	54538	54578	54617	54657	54697	54736
0.12	54776	54815	54855	54895	54934	54974	55013	55053	55093	55132
0.13	55172	55211	55251	55290	55330	55369	55409	55448	55488	55527
0.14	55567	55607	55646	55685	55725	55764	55804	55843	55883	55922
0.15	55962	56001	56041	56080	56120	56159	56198	56238	56277	56317
0.16	56356	56395	56435	56474	56513	56553	56592	56631	56671	56710
0.17	56749	56789	56828	56867	56907	56946	56985	57025	57064	57103
0.18	57142	57182	57221	57260	57299	57339	57378	57417	57456	57495
0.19	57535	57574	57613	57652	57691	57730	57769	57809	57848	57887
0.2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0.3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0.4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0.5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0.6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	**74857**	75175	75490
0.7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0.8	78814	79103	79389	79673	**79955**	80234	80511	80785	81057	81327
0.9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1.0	84134	84375	84614	84849	**85083**	85314	85543	85769	85993	86214
1.1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1.2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	**89973**	90147
1.3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1.4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1.5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1.6	94520	94630	94738	94845	**94950**	95053	95154	95254	95352	95449
1.7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1.8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1.9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	**97500**	97558	97615	97670
2.0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169

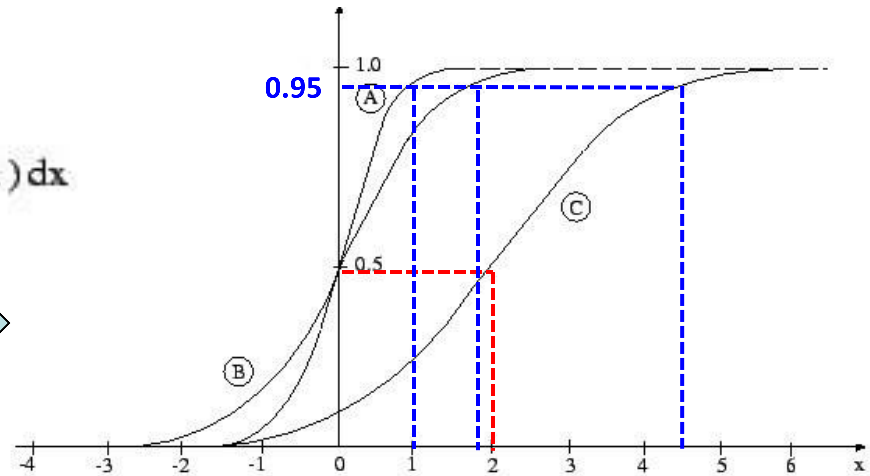
LA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA

La funzione di ripartizione o funzione di distribuzione cumulativa esprime la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori uguali o inferiori a x.



funzione densità di probabilità *f(x)*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$$



Funzione di ripartizione F*(x)*

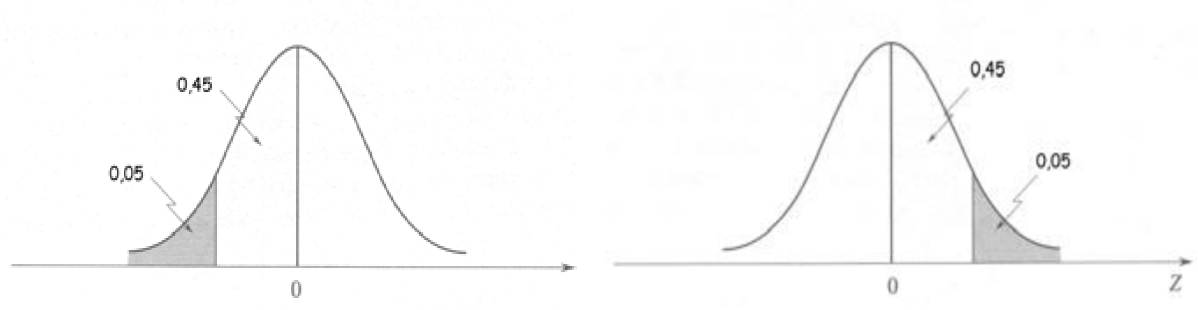
Il minimo valore di x, sotto il quale ricade una certa percentuale degli altri elementi osservati, è detto percentile (o frattile).

- Per la curva C (Normale) il percentile 95 è 4.5
- Per la curva B (Standardizzata) il percentile 95 pari a 1 va trasformato: $x = z\sigma + \mu$

ESEMPIO 2: distribuzione standardizzata

Torniamo sul problema dell'ARDSU, dove il reddito delle famiglie degli studenti si distribuiva normalmente con μ=15000€ e σ=1500€. Supponiamo che l'ARDSU abbia avuto più fondi del previsto e possa assegnare una borsa di studio al 5% degli studenti con minore reddito.

Quesito: qual è la nuova soglia di reddito massimo da fissare?



Per la simmetria della Normale l'area a sinistra del valore effettivamente da determinare (-z) è uguale a quella a destra del punto simmetrico (+z)

ESEMPIO 2: distribuzione standardizzata

sulla tavola che riporta l'area compresa nell'intervallo [0,z], cerchiamo il valore z a cui corrisponde un'area di: 0.50 – 0.05 = 0.45

Lo z cercato si colloca tra:

1,64 (area=0,4495) e

1,65 (area=0,4505)

Per interpolazione: z = 1,645

NB: il punto z cercato era in realtà quello simmetrico, a sinistra dell'origine, e quindi negativo:

z = -1,645

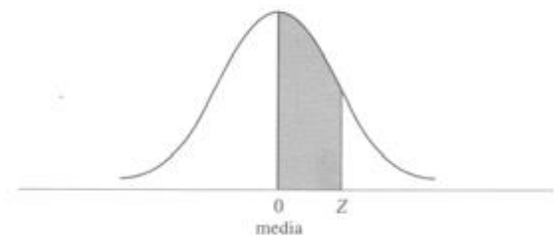


Tavola A.1 La distribuzione normale.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4022	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

ESEMPIO 2: distribuzione standardizzata

Per riportare il risultato ottenuto da punto z in Euro si deve effettuare una trasformazione di variabili:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad x = z\sigma + \mu$$

Dunque la nuova soglia di reddito per avere la borsa è:

x = -1,645 * 1500 + 15000 = 12532,5 €

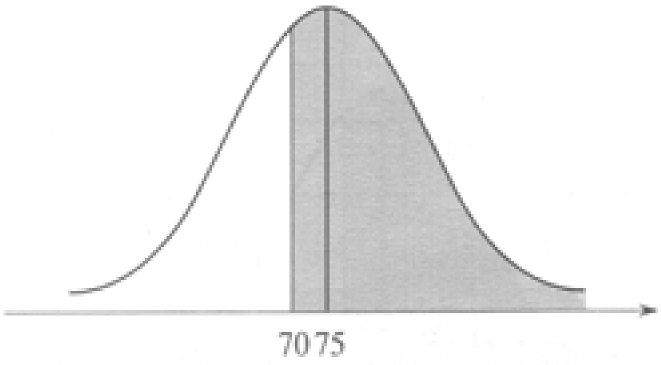
ESEMPIO 3: distribuzione standardizzata

La velocità delle auto rilevata da un autovelox si distribuisce normalmente con μ =75 km/h e σ =8 km/h.

Quesito: determinare la percentuale di auto che ha superato il limite di velocità di 70 km/h.

Supponiamo di avere a disposizione la tavola della Normale che riporta l’area compresa nell’intervallo [0, z].

Considerato che l’area a destra della media vale 0.5, si dovrà calcolare solo l’area compresa tra 70 e 75.



ESEMPIO 3: distribuzione standardizzata

Il primo passo è calcolare il valore z standardizzato corrispondente a 70 km/h:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = (70 - 75) / 8 = -0.625$$

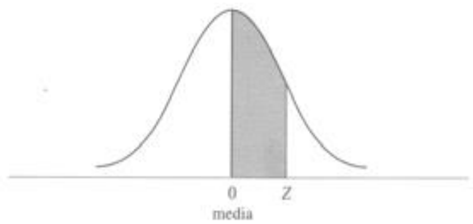


Tavola A.1 La distribuzione normale.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4022	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Si trova 0.625 sulla tavola per interpolazione tra i due valori più prossimi:

(0.2324 + 0.2357) / 2 = 0.2341

Si aggiungere l'area a destra del valore medio:

0.2341 + 0.5 = 0.7341

Il 73,41% degli autoveicoli transitati ha superato il limite di velocità